

Краевая задача для одного класса уравнений третьего порядка

Муминов Фарход Маликович

канд.мат-физ. наук, доцент,

Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,

Республика Узбекистан, г. Алмалык

E-mail: farxod.muminov.58@inbox.ru

ABSTRACT

В этой статье приводится постановка задач для уравнения третьего порядка. При определенных условиях на коэффициенты и правую.

This article presents the formulation of non-local problems for a mixed-type equation. Under certain conditions, the correctness of these problems is proved on the coefficients and the right side of the equation.

ARTICLE INFO

Received: 20th February, 2025

Accepted: 14th March 2025

KEY WORDS:

уравнения опорные понятия, уравнения смешанная нелокальная задача, сингулярная интегральная уравнения. The equations are basic concepts, the equations are mixed nonlocal back, singular integral equations.

Односвязной области D , ограниченной гладкой линией σ , опирающейся на точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$ расположенной в четверти плоскости $(x > a, y < 0)$ и отрезками AA_1 , BE , A_1E прямых $x=0$, $x=1$, $y=1$ соответственно, где O, E – точки с коэффициентами $(0;0)$, $(1;1)$ рассматривающая уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu) = 0 \quad (1)$$

где

$$Lu = u_{xx} + \frac{1 - \operatorname{sgn} y}{2} u_{yy} - \frac{1 + \operatorname{sgn} y}{2} u_y \quad (2)$$

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ со следующим свойствами:

1. Функция $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D ($y \neq 0$)

2. Функция $u(x, y)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$ (допускается, что в точках $O(0;0)$, $B(1;0)$ частные производные u_x , u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы)

3. Функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{\sigma} &= f(\xi) \quad (\xi \text{ -точка контура } \sigma), \quad u|_{A_1E} = \psi_1(x) \\ u|_{x=l} &= u|_{BE} \quad (0 < l < 1), \quad u(0, y) + u(0, -y)|_{AA_1} = \psi(y) \\ u_x|_{AO} &= \nu(y) \end{aligned} \quad (3)$$

где f, ψ, ψ_1, ν – заданные функции удовлетворяющие определенным условиям гладкости и условиям согласования, $\psi(y)$ – частная функции при исследовании этих задач будем пользоваться тем фактором, что любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x, y) = z(x, y) + \omega(x) \quad (4)$$

Соответственно (1), $z(x, y)$ – регулярное решение уравнения

$$z_{xx} + \frac{1 - \operatorname{sgn} y}{2} z_{yy} - \frac{1 + \operatorname{sgn} y}{2} z_y = 0 \quad (5)$$

ω – произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функция без ограничения общности можно предполагать $\omega(0) = \omega'(0) = 0$, предполагается, что σ целиком лежит в полосе ограниченными прямыми $x = 0$, $x = 1$ на основании (3)-(5) задача 1 редуцируется к определению регулярного решения уравнения (5) в области $D(y \neq 0)$ удовлетворяющего краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} z|_{\sigma} &= f(\xi) - \omega(x), \quad z|_{BE} = z|_{x=l} = \varphi_1(y) - \omega(1) \\ z|_{OA_1} &= \varphi(y) \quad (0 \leq y \leq 1), \quad z|_{AO} = \psi(y) - \varphi(-y), \quad (-1 \leq y \leq 0) \\ z|_{A_1E} &= \psi_1(x) - \omega(x), \quad z_x|_{AO} = \nu(y) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Докажем единственность решения задача 1. Если $f = \psi = \psi_1 = \nu = 0$, то функция $z(x, y)$ не может достигать положительного максимума (отрицательного минимума) на отрезке OB и AA_1 . Действительно предположим, что положительный максимум (отрицательный минимум) достигается в некоторой точке $N(x_0, 0)$. То уравнения $z_{xx} - z_y = 0$ следует, что $z_y(x_0, 0) \leq 0$ ($z_y(x_0, 0) \geq 0$) с другой стороны, из эллиптической части области $D = \{(x, y) \in D, x > 0, y < 0\}$ имеет $z_y(x_0, 0) > 0$, ($z_y(x_0, 0) < 0$). Из постановки задачи следует, что $\lim_{y \rightarrow 0-} z(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} z(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0-} z_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} z_y(x, y)$ отсюда заключаем, что функция $z(x, y)$ не может достигать положительного максимума (отрицательного минимума) на OB .

Пусть функция $z(x, y)$ достигает положительно максимума (отрицательного минимума) в точке $N(0, y)$ отрезке A_1O . Тогда $z(x, y)$ достигает положительно минимума (отрицательного максимума) в точке $N_1(0, y)$ отрезке AO . Из условия $z_x|_{AO} = 0$ следует, что $z(x, y)$ не достигает положительного максимума (отрицательного минимума) на открытом отрезке OA .

Следовательно, $z(x, y)$ не достигает положительно максимума (отрицательного минимума) на A_1O . Функция $z(x, y)$ не может достигать положительного максимума (отрицательного минимума) на BE . В противном случае этот максимум должен реализоваться внутри области $D_1 = \{(x, y) \in D, x > 0, y < 0\}$, что невозможно отсюда следует, что $z(x, y) = 0$ в области D_1 . Тогда $\varphi(y) = 0, \omega(x) = 0$ Следовательно, $z(x, y) \equiv 0$ и в области D_2 . Таким образом, доказано, что $u(x, y) \equiv 0$ в области D .

Переходим к доказательству существования решения задачи. Для простоты предположим что σ – дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$. Регулярное в области D_2 решение уравнения (5) удовлетворяющее краевым условиям $z_x|_{AO} = v(y), z_y|_{OB} = v_1(x), z|_{\sigma} = f(\xi) - \omega(x)$ дается формулой

$$z(x, y) = \int_0^1 v(t)G(x, y, t, 0)dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \bar{f}(\theta) \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{|\xi|=1} d\theta - \int_{-1}^0 v(t)G(x, y; 0, t)dt \quad (6)$$

$\bar{f}(\theta) = f(\theta) - \omega(\cos \theta); G(x, y; \xi, \eta)$ – функция Грина. Из равенства (6) пойдём $\tau(x)$

$$\tau(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 v(t) \ln \left| \frac{1-t^2x^2}{t^2-x^2} \right| dt = g_1(x) \quad (7)$$

где

$$g_1(x) = \int_{-1}^0 v(t)G(x, 0; 0, t)dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \bar{f}(\theta) \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{|\xi|=1} d\theta$$

В силу непрерывности первых производных от функции $z(x, y)$ из параболической части D_1 области D получаем соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$

$$\tau^4(x) - v_1(x) = 0 \quad (8)$$

Используя условия $\tau(0) = \tau(1) = 0$, из (8) получаем

$$\tau'(x) - \int_0^x v_1(t)dt + \int_0^1 (1-t)v_1(t)dt = 0 \quad (9)$$

Исключая $\tau'(x)$ из (8) и (9), имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 v_1(t) \left(\frac{2t^2x}{1-x^2t^2} - \frac{2x}{t^2-x^2} \right) dt = F(x) \quad (10)$$

где

$$F(x) = \int_0^x v(t)dt - \int_0^1 (1-t)v_1(t)dt - g_1'(x)$$

Пользуясь заменой переменных

$$\frac{t^2}{1+t^4} = v, \quad \frac{x^2}{1+x^4} = s$$

уравнения (10) приводим к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{m(v)}{v-s} dv = P(s) \quad (11)$$

где

$$m(v) = v_1(t) \frac{1+t^4}{2t}, \quad P(s) = F(x) \frac{1+x^4}{2x}$$

Обращая интегральное уравнение (11), имеем

$$m(v) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{s(1-v)}{v(1-s)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{p(v)}{v-s} dv$$

Возвращаясь к старым переменным x и t , получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$v_1(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 k_0(x, t) v_1(t) dt = f_0(x) \quad (12)$$

где $K_0(x, t)$ – резольвента ядра

$$f_0(x) = \tilde{f}(x) + \int_0^1 g(x, t) \omega(t) dt$$

где $\tilde{f}(x)$, $g(x, t)$ – известные функции.

Подставляя значения $v_1(x)$ в формулу (9) определяем $\tau(x)$

$$\tau(x) = \int_0^1 p_1(x, t) \omega(t) dt + F_1(x) \quad (13)$$

Решение уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям $z|_{OA_1} = \varphi(y)$, $z|_{BE} = \varphi_1(y) - \omega(1) = \bar{\varphi}_1(y)$, $z|_{OB} = \tau(x)$ дается формулой

$$z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^1 \varphi(\eta) G_{\xi}^*(x, y; 0, t) dt - \int_0^y \bar{\varphi}_1(t) G_{\xi}^*(x, y; 1, t) dt + \int_0^1 \tau(t) G^*(x, y; t, 0) dt \right] \quad (14)$$

где $G^*(x, y; \xi, \eta)$ – функция Грина.

Реализуя условие $z|_{x=l} = \bar{\varphi}_1(y)$ относительно $\bar{\varphi}_1(y)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода с достаточно гладким ядром

$$\bar{\varphi}_1(y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \bar{\varphi}_1(t) G_{\xi}^*(l, y; 1, t) dt = F_2(y) \quad (15)$$

где

$$F_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \varphi(t) G_{\xi}^*(l, y; 0, t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \tau(t) G^*(l, y; t, 0) dt$$

Уравнения (15) имеет единственное решение

Реализуя условие $z|_{OA} = \psi(y) - \varphi(-y)$ имеем

$$\varphi(y) = \psi(y) - \int_0^1 \nu_1(t) G(0, -y; t, 0) dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \bar{f}(\theta) \frac{\partial G(0, -y; \cos \theta, \sin \theta)}{\partial n} d\theta + \\ + \int_0^1 \nu_1(-t) G(0, -y; 0, -t) dt$$

Подставляя значения $\varphi(y)$, $\bar{\varphi}_1(y)$ в формулу (14) и используя условия $z|_{A_E} = \psi_1(x) - \omega(x)$, для определения $\omega(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

Литература

1. Врагов В. Н. Краевые задачи неклассических уравнений математической физики. - Новосибирск.: ИГУ, 1983. - 84 с.
2. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М.: Мир. 1972.
3. Ф.М.Муминов. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент "Chinor fayzli baland" 2022.