PERIODICA
Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities
ISSN NO:2720-4030 Volume 41 April, 2025

Смешанного Задача Для Одного Класса Эллиптико-Параболических Уравнений Второго Порядка

Муминов Фарход Маликович
канд.мат-физ. наук, доцент,
Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: farxod.muminov.58@inbox.ru

ABSTRACT
В этом статье приводится постановка корректной краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-параболического типа. При определённых условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказывается корректности этих задач в пространстве С. Л. Соболева.

ARTICLE INFO
Received: 14th February, 2025
Accepted: 11th March 2025

KEYWORDS: *уравнения, смешанная задача, корректность*

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv (-1)^{\left[\frac{p}{2}\right]+1} K(t)\mathcal{D}_t^p u + (-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \mathcal{D}_x^\alpha \left(a_{\alpha\beta}\mathcal{D}_\lambda^\beta u\right) + Bu = f \qquad (1)$$

$$Bu = \sum_{i=1}^{p-1} K_i(x,t)\mathcal{D}_t^i u + \sum_{|\alpha|\le 2m-1} b_\alpha(x,t)\mathcal{D}_x^\alpha u,$$

$$\mathcal{D}_x^\alpha u = \frac{\delta^{|\alpha|}u}{\delta x_1^{\alpha_1}\dots\delta x_n^{\alpha_n}}; \quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n), \ |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha i, \quad \alpha i \in N$$

Где $p \ge 1, m \ge 1$ – целые числа, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$, Ω-область, ограниченная достаточно гладкий замкнутой поверхностью γ в R^n, $x,t) \in G = \Omega \times [0,T]$, $\Gamma = \gamma \times [0,T]$.

Предлагается, что коэффициенты уравнения (1) гладкие и удовлетворяют следующим условиям: $K(t) > 0, \ t > 0;$ $K(0) = 0; \ a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t),$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha+\beta} \ge \mathcal{V}(\xi)^{2m}, \qquad (x,t) \in G, \qquad \xi \in R^n, \mathcal{V} > 0.$$

Задача. В области G ищется решение уравнения (1) такое, что

$$\frac{\delta^k u}{\delta n^k}\Big|_\Gamma = 0, \ K = \overline{0, m-1} \ (2)$$

$$\mathcal{D}_t^i u\Big|_{t=0} = 0, 0 \le i \le \left[\frac{p-1}{2}\right] - 1; \ \mathcal{D}_t^j u\Big|_{t=\Gamma} = 0, \ 0 \le \gamma \le \left[\frac{p}{2}\right] - 1 \ (3)$$

Где $n = (n_1,\dots,n_n,n_i)$ –внутренняя нормаль K, Γ.

В настоящей работе при определенных условиях на коэффициенты уравнения доказана существования единственного регулярного решения задачи (1)-(3) в весовом пространстве Соболева. Через C_L обозначим класс гладких функций в $\bar{G}$, удовлетворяющих краевым условиям (2)-(3).

1. При $\rho = 2S$ для простоты положим $K_{2S-1} = (-1)^{S+1}a(x,t)$, $K_{2S-2} = (-1)^{S+1}b(x,t)$ и будем считать, что функция $\beta(x) = \alpha(x,0) - K_t(0) \geq 0$. Пусть H_L весовое пространство Соболева, которое получено пополнением класса C_L по норме

$$\|u\|_L^2 = \int_G \left[K^2(\mathcal{D}_t^{2S}u)^2 + K \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} (\mathcal{D}_t^S \mathcal{D}_x^\alpha u)^2\right] dG + \|u\|_{2m,}^2 \qquad 2S-1$$

Где $\|\cdot\|$ - норма пространства $W_2^{m,S}(G)$ [1].

Рассмотрим вспомогательные операторы:

$$L_0 u = (-1)^{S+1}[K(t)\mathcal{D}_t^{2S} + a_1 \mathcal{D}_t^{2S-1}u + b_1 \mathcal{D}_t^{2S-2}u] + (-1)^{m+1}\Delta^m u + c_1 u$$

$$Pu = (-1)^{S+1}\mathcal{D}_t^{2S-1}u + (-1)^{m+1}\Delta^m u,$$

Где a_1, b_1, c_1 – некоторые константы.

Лемма1. При достаточно больших $a_1 > 0, -b_1 > 0, -c_1 > 0$ для всех $u \in C_L$ Имеет место неравенство

$$(L_0 u, Pu)_0 \geq m_3 \left[\int_G K \sum_{|\alpha|=m} (\mathcal{D}_t^S \mathcal{D}_x^\alpha u)^2 \, dG + \|u\|_{2m,2S-1}^2\right], m_3 > 0$$

.

Доказательство. Для любой функции $u(x,t)$ из C_L справедливо неравенство

$$(L_0 u, Pu)_{0,0} = \frac{1}{2} \int_{t=0} [(a_1 - a + SK_t)(D_t^{S-1}u)^2 + (a_1 + 1 - SK_t D_t^{S-1} V^2)]dx +$$
$$+\frac{1}{2} \int_{t=\Gamma} K(D_t^{S-1}u)^2 dx + \int_G \left\{a_1 - \frac{1}{2}K_t(D_t^{S-1}u) + (\Delta^m u)^2 + \right\} dx +$$
$$+K(D_t^S u) + \left[-b_1 - \frac{S^2}{2}K_{tt}\right](D_t^{S-1}u)^2 - c_1 u^2 + K(D_t^S V)^2 +$$
$$+\left[-b_t - \frac{S^2}{2}K_{tt}\right](D_t^{S-1}u)^2 + [(-c_1 + 1)V^2]dG$$

Где $V = (-\Delta)^{m/2}u$, а интегральные члены, обозначенные многоточием, играют подчиненную роль. Из последнего равенства на основании неравенств Коши, Гординга и теоремы вложения следует утверждение леммы1.

Теорема1. Пусть числа $a_1 > 0, -b_1 > 0, -c_1 > 0$ является достаточно большими. Тогда для любой $f \in L_2(G)$ уравнение $L_0 u = f$ имеет единственное решение в пространстве H_L и справедлива оценка

$$\|u\|_L \leq m\|f\|_{0,0}, \ m > 0.$$

Доказательство. Пусть $\{\psi_K\}$ – фундаментальная система в $W_2^{2m,2S}(G) \cap W_2^{m,S}(G)$ ортонормированная в $L_2(G)$. В качестве базиса $\{\varphi_K\}$ возьмем решения краевой задачи:

$$P\varphi_e = \psi_e, \ e = 1,2, \ldots \qquad (4)$$

$$\frac{\delta^i \varphi_e}{\delta h^i}\Big|_\Gamma = 0, \ i = \overline{0, m-1}; \ D_t^j \varphi_e \Big|_{\substack{t=0\\t=T}} = 0, \ j = \overline{0, S-2}; D_t^{S-1}\varphi_e \Big|_{t=T} = 0 \quad (5)$$

В силу [2] задачи (4)-(5) имеет единственное решение φ_e из $W_2^{2m,2S}(G)$. Приближенные решения $u^V(x,t)$ ищем в виде

$$u^V = \sum_{k=1}^N C_k^N \varphi_k(x,t)$$

из системы алгебраических уравнений

$$(L_e u^N, \psi_k)_{0,0} = (f, \psi_k)_{0,0}, \ k = \overline{1, N} \qquad (6)$$

Умножим каждое из (6) на C_k^N и сложим по k ой 1 до N. Получим равенство

$$(L_e u^N, Pu^V)_{0,0} = (f, Pu^V)_{0,0}$$

Из которого, в силу леммы1 следует оценка

$$\int_G K \sum_{|\alpha|=m} (\mathcal{D}_t^S \mathcal{D}_x^\alpha u^V)^2 \, dG + \|u^V\|_{2m,2S-1}^2 \leq m, \|f\|_0^2 \quad (7)$$

Отсюда вытекает разрешимость системы (6), ибо для не имеет место теорема единственности. Действительно, если u^V было бы решением однородной системы (6), то из (7) следовало бы, что

$u^V = 0$ в $W_2^{2m,2S-1}(G)$ значит, имеем $0 = Pu^V = \sum_{k=1}^{N} C_k^N \psi_k$.
Тогда $C_k^N = 0$ при $k = \overline{1, N}$. Благодаря (7) можно переходит к пределу $N \to \infty$
в равенстве

$$(f, \psi_e)_{0,0} = (L_0 u^V, \psi_e)_{0,0} = (-1)^S \int_G \mathcal{D}_t^{2S-1} u^V \mathcal{D}_t(k\psi_e) dG + \cdots$$

на основания этого нетрудно видеть, что для предельной функции $u(x,t)$ из $W_2^{2m,2S-1}(G)$ такой, что $\sqrt{k}\mathcal{D}_t^S \mathcal{D}_x^\alpha u \in L_2(G)$ при $|\alpha| \leq m$, выполнено тождество

$$(f, \eta)_{0,0} = (-1)^S \int_G \mathcal{D}_t^{2S-1} u^V \mathcal{D}_t(k\eta) dG + \cdots$$

для любых η из $\dot{W}_2^{m,S}(G)$. Следовательно уравнение $L_e u = f$ удовлетворяется в смысле распределений в G. Тогда из самого уравнения следует, что $k\mathcal{D}_t^{2S} u$ принадлежит $L_2(G)$. Теорема доказана.

В силу теоремы1 методом продолжения по параметру доказывается теорема2.

Теорема2. Пусть коэффициенты $b_0(x,t) < 0$ и $|b_0|$ достаточно большой. Кроме того выполнены условия

$$2b - (2S-1)a_t + S^2 K_{tt} \leq -2б < 0$$
$$a(x,t) \equiv a(t), \qquad 0 \leq t \leq h; a(0) - SK_t(0) \geq б > 0$$

Тогда для любой $f \in L_2(G)$ существует единственное решение задачи (1)-(3) из пространства H_L при $p = 2S$.

При $p = 2S + K_{2S} = (-1)^{S+1} a(x,t)$. Обозначим через W_L анизотропное пространство Соболева с весом, полученное замыканием C_L по норме

$$\|u\|_L^2 = \|u\|_{2m,2S}^2 + \|K\mathcal{D}_t^{2S+1} u\|_{0,0}^2$$

Лемма2. Пусть коэффициенты $b_0(x,t) < 0$ и $|b_0|$ достаточно большой и

$$2a(x,0) - (2S+1)K_t(0) \geq б > 0$$

Тогда существует числа $\lambda > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$\int_G e^{-2\lambda t} uLu dG \geq m_0 \|u\|_{m,S}^2, m_0 > 0$$

Лемма3. Пусть выполнены условия лемма2 и $a(x,t) \equiv a(t), t \in [0, h_0]$, $0 < h_0 < T$.
Тогда для любой функции $u \in C_L$ справедливо коэрцитивное неравенство

$$\|Lu\|_{0,0} \geq m\|u\|_L, \ m > 0.$$

Доказательство леммы 2,3 проводится аналогично доказательству соответствующих лемме из [2].

Литература

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Николаевский С.М. Интегральные предоставления функций и теоремы вложения. М: Наука. 1975. 480 стр.
2. Брюханов Ю.А. Об одном классе эллиптических уравнений, выражавшихся на границе. Дифференциальные уравнения. 1973. Т.4 166-168 стр.
3. Врагов В.К. Краевые задачи неклассических уравнений математической физики. Новосибирск НГУ, 1983, 84 стр.
4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. Наука. 1981 448 стр.
5. Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022: 5.947 ASI Factor = 1.7
6. Муминов Ф.М., Каримов С.Я. О смешанных краевых задачах для уравнения составного типа третьего порядка. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 4 ISSUE 2 ISSN 2181-1784 SJIF 2024: 7.404 ASI Factor = 1.7
7. Муминов Ф.М., Каримов С.Я. On the formulation of boundary value problems for one third-order equation. International Global Conference 1 (4), 257-263.