



Краевые задачи для уравнений переменного типа

Муминов Ф.М., Душатов Н.Т., Миратоев З.М.

Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета
mfarhod007@gmail.com, n_dushatov@rambler.ru, miratoyev2014@mail.ru

ABSTRACT

Исследования неклассических уравнений математической физики сравнительно новое направление в теории краевых задач. Особый интерес эти задачи представляют в связи с их приложением к различным задачам механики и физики. Различные классы таких задач подробно исследованы в работах А.В.Бицадзе, В.Н.Врагова [1], Ф.М.Муминова [2].

ARTICLE INFO

Received: 21st April 2023

Revised: 22th May 2023

Accepted: 24th June 2023

KEY WORDS:

Локаль, нелокаль, нелокальная задача, негативная пространства, сопряженная уравнения.

Пусть $G \subset R^p$ – ограниченная область переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ с гладкой границей γ . В области $D = G \times (0; T)$ рассмотрим уравнение [3-5]

$$Lu \equiv K(t)u_{tt} + \Delta_x u + \alpha(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t). \quad (1)$$

Предположим, что коэффициенты оператора L – достаточно гладкая в $\bar{D}$ функции. Уравнение (1) в различных частях области D может быть эллиптического, параболического и гиперболического типов в зависимости знака функции $K(t)$ на $(0; T)$. Постановка краевых задач для уравнения (1) существенно зависит от знака $K(t)$ при $t = 0$ и $t = T$.

Рассмотрим следующие задачи:

Найти решение уравнения (1) в области D , удовлетворяющее условиям $u|_{\gamma} = 0$ и

1) если $K(t) \geq 0 \geq K(0)$, то

$$u(x, T) = \mu u(x, 0) \quad (2)$$

2) если $K(0) > 0$, $K(T) \geq 0$, то

$$\begin{aligned} u(x, T) &= \mu u(x, 0), \\ u_t(x, 0) &= m u_t(x, T). \end{aligned} \quad (3)$$

3) если $K(0) \leq 0, K(T) < 0$, то

$$\begin{aligned} u(x, T) &= \mu u(x, 0), \\ u_t(x, T) &= n u_t(x, 0). \end{aligned} \quad (4)$$

4) если $K(0) > 0 > K(T)$, то

$$\begin{aligned} u(x, T) &= \mu u(x, 0), \\ u_t(x, 0) &= u_t(x, T) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Всюду ниже будет предполагать, что $-1 \leq \mu \leq 1$. Рассмотрим вначале случай $|\mu| < 1$.

Обозначим через $H(D)$ пространство, образованное замыканием гладких в D функций по норме [6-8]

$$\|u\|_H = \left[\int_D \left(k^2 u_{tt}^2 + (D_x^\beta u)^2 \right) dD \right]^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{W_2'}, \quad |\beta| = 2.$$

Теорема. Пусть $f \in L_2(D)$, $\nabla_x f \in L_2(D)$, $f(x, t) = 0$, $x \in \gamma$ в области D выполнено условие

$$\alpha(x, t) - \frac{1}{2} K_t(t) \geq \delta > 0, \quad -c(x, t) \geq 0, \quad -c_1(x, t) \geq 0 \quad (6)$$

и существует постоянная $\lambda : 0 < \lambda \max_t |K(t)| \leq \delta$ такая, что $|\mu| \leq e^{-\lambda T/2} \max_x \sqrt{\frac{c(x, 0)}{c(x, T)}}$,

$$|m| \leq e^{-\lambda T/2} \sqrt{\frac{K(T)}{K(0)}}, \quad |n| \leq e^{-\lambda T/2} \sqrt{\frac{K(0)}{K(T)}}. \quad (7)$$

Тогда существует единственное решение задач (1)-(4) из пространство $H(D)$. Если дополнительно известно, что $f_t \in L_2(D)$ и в области D

$$\alpha(x, t) + \frac{1}{2} K_t(t) \geq \delta > 0, \quad (8)$$

то решения задач (1)-(4) будут такие, что $u \in W_2^2(G \times (t_1, t_2))$, где $K(t_i) \neq 0$, $(i=1, 2)$.

Доказательство. Рассмотрим регуляризованное уравнение

$$L_\varepsilon u^\varepsilon \equiv -\varepsilon u_{ttt}^\varepsilon e^{-\lambda t} + L u^\varepsilon = f, \quad \varepsilon > 0, \quad (9)$$

и задачи: найти решение уравнения (9) в области D , удовлетворяющее условиям:

$u^\varepsilon|_{\gamma \times [0, T]} = 0$ и в случае задачи (1):

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x, T) &= \mu u^\varepsilon(x, 0), \\ u_t^\varepsilon(x, T) &= u_t^\varepsilon(x, 0), \quad u_{tt}^\varepsilon(x, T) = e^{-\lambda T} u_{tt}^\varepsilon(x, 0), \end{aligned} \quad (10)$$

в случае задачи 2)-

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x, T) &= \mu u^\varepsilon(x, 0), \quad u_t^\varepsilon(x, 0) = m u_t^\varepsilon(x, T), \\ u_{tt}^\varepsilon(x, T) &= m u_{tt}^\varepsilon(x, 0), \end{aligned} \quad (11)$$

в случае задачи 3)-

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x, T) &= \mu u^\varepsilon(x, 0), \quad u_t^\varepsilon(x, T) = n u_t^\varepsilon(x, 0), \\ n u_{tt}^\varepsilon(x, T) &= u_{tt}^\varepsilon(x, 0), \end{aligned} \quad (12)$$

в случае задачи 4)-

$$u^\varepsilon(x, T) = \mu u^\varepsilon(x, 0), \quad u_t^\varepsilon(x, 0) = u_t^\varepsilon(x, T) = 0. \quad (13)$$

Решения задачи (9), (10)-(13) будем искать в виде (индекс ε опускаем)

$$u^\nu(x, t) = \sum_{k=1}^{\nu} C_k^\nu(t) \varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_k(x)\}$ базис пространства $W_2^2(G) \cap W_2^1(G)$ составленной из собственных функций задачи

$$-\Delta_x \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \varphi_k|_\gamma = 0.$$

Функции $C_k^\nu(t)$ определим из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\int_G \varphi_k L_\varepsilon u^\nu dG = \int_G \varphi_k f dG, \quad k = \overline{1, \nu}, \quad (14)$$

и условий (10)-(13) (в зависимости от задачи), где вместо $u^\varepsilon(x, t)$ стоит $C_k^\nu(t)$, $(k = \overline{1, \nu})$.

Разрешимость задача (14) с соответствующими краевыми условиями следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Из (14)

$$\begin{aligned} \int_D u_t^\nu f e^{\lambda t} dD &= \int_D u_t^\nu e^{\lambda t} L_\varepsilon u^\nu dD = \varepsilon \int_D (u_{tt}^\nu)^2 dD + \\ &+ \int_D \left(\alpha - \frac{1}{2} K_t - \frac{\lambda}{2} k \right) e^{\lambda t} (u_t^\nu)^2 dD + \frac{1}{2} \int_D (\nabla_x u^\nu)^2 e^{\lambda t} dD - \\ &- \frac{1}{2} \int_D (C_t + \lambda C) (u^\nu)^2 e^{\lambda t} dD - \frac{1}{2} \int_\Gamma [k(u_t^\nu)^2 + C(u^\nu)^2] e^{\lambda t} n_t dT. \end{aligned}$$

Используя условия (6) и граничные условия получим при $0 < \lambda \max |K(t)| \leq \delta$

$$\int_D u_t^\nu e^{\lambda t} f dD \geq \varepsilon \|u_{tt}\|_{L_2}^2 + \frac{\delta}{2} \|u_t^\nu\|_{L_2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\nabla_x u^\nu\|_{L_2}^2.$$

Следовательно

$$\|u^\nu\|_{W_2^2}^2 + \varepsilon \|u_{tt}^\nu\|_{L_2}^2 \leq C \|f\|_{L_2}^2. \quad (15)$$

Здесь и далее через c обозначим, вообще говоря различные положительные постоянные, не зависящие от ε и ν .

Аналогично из (14)

$$\int_D \Delta_x u_t^\nu e^{\lambda t} f dD = \int_D \Delta_x u_t^\nu e^{\lambda t} L_\varepsilon u^\nu dD \geq \varepsilon \|\nabla_x u_{tt}^\nu\|_{L_2}^2 + \frac{\delta}{2} \|\nabla_x u_t^\nu\|_{L_2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\nabla_x u^\nu\|_{L_2}^2 - C \|f\|_{L_2}^2.$$

Отсюда

$$\|\nabla_x u_t^\nu\|_{L_2} + \|\Delta_x u^\nu\|_{L_2} \leq C [\|f\|_{L_2} + \|\nabla_x f\|_{L_2}]. \quad (16)$$

Получим теперь равномерные по ε и ν оценки u_t^ν вблизи оснований цилиндра D в случае граничных условий (11)-(13). Рассмотрим функцию $\varphi_i(t) \in C^\infty[0, T]$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{\sigma}{2}, \\ 0, & \sigma \leq t \leq T - \sigma, \\ \frac{e^{\lambda t}}{m^2}, & T - \frac{\sigma}{2} \leq t \leq T, \text{ при } m \neq 0, \text{ и } 0 \text{ при } m = 0. \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} -1, & T - \frac{\sigma}{2} \leq t \leq T, \\ 0, & \sigma \leq t \leq T - \sigma, \\ \frac{e^{-\lambda T}}{n^2}, & 0 \leq t \leq \frac{\sigma}{2}, \text{ при } n \neq 0, \text{ и } 0 \text{ при } n = 0. \end{cases}$$

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{\sigma}{2}, \\ 0, & \sigma \leq t \leq T - \sigma, \varphi_3(t) > 0, \quad 0 \leq t < 6\delta, \\ -1, & T - \frac{\sigma}{2} \leq t \leq T, \quad \varphi_3(t) < 0, \quad T - \sigma < t \leq T. \end{cases}$$

Здесь φ выбрано так, чтобы $0 < 2\sigma < T$, и если $K(0) \neq 0$ и $K(T) \neq 0$, то $|K(t)| > k_0$, при $0 < t < \sigma$, $T - \sigma < t < T$ соответственно. Если u^ν удовлетворяет условиям (11) (соответственно (12), или (13)), то из (14)

$$\int_D u_{tt}^\nu \varphi_i f dD = \int_D u_{tt}^\nu \varphi_i L_\varepsilon u^\nu dD \geq \frac{1}{2} \int_D k \varphi_i (u_{tt}^\nu)^2 dD - C \|f\|_{L_2}^2.$$

Отсюда

$$\left\| \sqrt{|\varphi_i|} u_{tt}^\nu \right\|_{L_2} \leq C \|f\|_{L_2}, \quad (17)$$

где $i = 1$ (соответственно $i = 2$, или $i = 3$).

Из ограниченной в пространстве $H(D)$ последовательности $\{u_{\varepsilon_i}^\nu\}$ извлечен слабоходящая к функции и подпоследовательности $\{u_{\varepsilon_i}^\nu\}$. Из равенств (14) после предельного перехода при $\nu_i \rightarrow \infty$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$ получим

$$-\int_D u_t (kv)_t dD + \int_D (\Delta_x u + \alpha u_t + Cu - f) v dD = 0$$

для всякой функции $v \in L_2$, $v_t \in L_2$, $v(x, 0) = v(x, T) = 0$.

Следовательно, u — решение задачи (9), (10), (9)-(13) и $u \in H(D)$. Единственности полученных решений следует из неравенства

$$\int_D u_t e^{\lambda t} L u dD \geq C \|u_t\|_{L_2}^2,$$

которое доказывается интегрированием по частям.

Граничные условия (3)-(5) задач 2) – 4) на u_t , очевидно, выполнены, так как вблизи оснований цилиндра D из оценок (17) следует, что $u_{tt} \in L_2$.

Пусть теперь выполнено условие (8) теоремы. Так же как в (17) получим оценки u_{tt} в L_2 в окрестности плоскостей $t = t_1$, где $0 < t_1 < t_2 < T$ и $K(t_i) \neq 0$. Пусть $\psi(t) \in C^\infty[0, T]$:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ 0, & 0 \leq t < t_1 - \sigma, \quad t_2 + \sigma_2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Здесь $\sigma_1 > 0$ – достаточно мало. Из (14)

$$-\int_D u_{ttt}^\nu \psi f dD = -\int_D u_{ttt}^\nu \psi L_\varepsilon u^\nu dD \geq \sigma \int_D \psi (u_{tt}^\nu)^2 dD - C \|f\|_{L_2}^2.$$

Отсюда

$$\|\sqrt{\psi} u_{tt}^\nu\|_{L_2} \leq C \|f\|_{L_2}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что для предельной функции u , $u_{tt} \in L_2 \in (G \times (t_1, t_2))$. Теорема доказана.

Литература

1. Врагов В.И. Краевые задачи неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983, 84с.
2. Врагов В.И. Об одной уравнений смешанно-составного типа.
3. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа. Central Asian Journal of mathematical theory and computer sciences. 2021. Issue: 04. April. ISSN:2660-5309.
4. Муминов Ф.М., Душатов Н.Т. О нелокальной краевой задаче для линейных уравнений смешанного типа. Central Asian Journal of theoretical and applied sciences. 2021. Vol.02/ Issue: 05. may. ISSN:2660-5309.
5. Fayzudinovich, S. I. (2021). To Investigation of The Mixed Problem For Systems of Equations of Compound Type. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Science, 2(4), 23-32.
6. Сраждинов, И. Ф. (2021). Начально-краевая задача для одной системы составного типа. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(3), 41-47.
7. Сраждинов, И. Ф. (2021). Смешанная Задача Для Одной Особой Системы Составного Типа С Коэффициентом Чебышева-Эрмита. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(10), 47-52.
8. Муминов, Ф. М., Душатов, Н. Т., Миратоев, З. М., & Ибодуллаева, М. Ш. (2022). ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(6), 606-612.