PERIODICA
Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities
ISSN NO:2720-4030 Volume 13, December, 2022

О Численном Решении Линейных Обобщенных Интегральных Уравнений Абеля

Б.С. Далиев
Преподаватель, Ферганского политехнического института
E-mail: b.daliyev@ferpi.uz

A B S T R A C T

Цель данной статьи - представить эффективную численную процедуру аппроксимации обобщенных интегральных уравнений Абеля первого рода. По этой причине применяются метод квадратурных формулах для получения решений обобщенных интегральных уравнений Абеля. Также проиллюстрирован анализ ошибок представленного метода. Приведено несколько примеров, а численные результаты показывают точность и эффективность этого метода.

A R T I C L E I N F O

Received: 20th October 2022
Revised:20th November 2022
Accepted:28th December 2022

K E Y W O R D S: Сингулярные интегральные уравнения, квадратурная формула, обобщенное интегральное уравнение Абеля.

Введение

Обобщенное интегральное уравнение Абеля является частным случаем линейного интегрального уравнения Вольтера первого рода. Обобщенное уравнение Абеля - одно из интегральных уравнений, которое непосредственно приводит к какой-то конкретной задаче физики, механики и других наук [1-7]. Сегодня во многих областях естественной науки распространены задачи, приводящие к решению линейных интегральных уравнений типа Абеля. Уравнениям типа Абеля всегда уделялось особое внимание [8-19]. Ряд работ посвящены вопросам существования, единственности и устойчивости решений уравнений этого класса [20-31]. В данной работе мы рассмотрим следующую обобщенную интегральную уравнению Абеля первого рода

$$f(x)=\int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1 \tag{1}$$

где $f(x)$ данная функция и $\varphi(s)$ неизвестная функция.

К сингулярным интегральным уравнениям подходили с помощью многих подходов, в основном с помощью численных методов, таких как метод гомотопии, метод вейвлетов Галеркина, метод разложения Тейлора и других методов. Мы сосредоточимся на методах, которые гарантируют существование единственного решения любого сингулярного интегрального уравнения с особенностью, связанной с тем, что ядро $(x-s)^{-\alpha}$ становится неограниченным в своей области интегрирования [32-47].

Решения уравнения Абеля

Решение уравнения Абеля (1) может быть дано, если воспользоваться формулой:

$$\int_a^b \frac{ds}{\sqrt{(b-s)(s-a)}} = \pi \qquad (2)$$

Действительно, в интеграле (2) с помощью преобразованием Эйлера $\sqrt{(b-s)(s-a)} = t(s-a) \Rightarrow b-s = t^2(s-a), \quad s = \frac{t^2 a+b}{t^2+1},$

$$ds = \frac{2at(t^2+1)-2t(t^2a+b)}{(t^2+1)^2}dt$$

или

$$ds = \frac{2t(a-b)}{(t^2+1)^2}dt .$$

$$\int_a^b \frac{ds}{\sqrt{(b-s)(s-a)}} = \int\limits_{\infty}^{0} \frac{\frac{2t(a-b)}{(t^2+1)^2}}{\sqrt{(b-\frac{t^2a+b}{t^2+1})(\frac{t^2a+b}{t^2+1}-a)}}dt = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\frac{2t(a-b)}{(t^2+1)^2}}{\sqrt{\frac{(b-a)t^2}{t^2+1}\cdot\frac{b-a}{t^2+1}}}dt =$$

$$= -\int\limits_0^{\infty} \frac{\frac{2t(a-b)}{(t^2+1)^2}}{\frac{t(b-a)}{t^2+1}}dt = \int\limits_0^{\infty}\frac{2dt}{t^2+1} = 2\,arctgt\Big|_0^{\infty} = 2(\frac{\pi}{2}-0) = \pi .$$

Перепишем формулу (2) так:

$$\int_z^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)(s-z)}} = \pi ;$$

умножим эту последнюю на произвольную функцию $\Psi(z)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до x:

$$\pi\int_0^x \Psi(z)dz = \int_0^x \Psi(z)dz \int_z^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)(s-z)}} .$$

Меняя порядок интегрирования в правой части, получим:

$$\pi\int_0^x \Psi(z)dz = \int_z^x \frac{ds}{\sqrt{x-s}} \int_0^s \frac{\Psi(z)dz}{\sqrt{s-z}} \ .$$

Заметив это, мы решим уравнение (1) при условии $f(0)=0$, если примем:

$$f(x) = \pi\int_0^x \Psi(z)dz\,,$$

т.е.

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi} f'(x)\,,$$

следовательно

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{\Psi(z)dz}{\sqrt{s-z}} = \frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{f'(z)dz}{\sqrt{s-z}} \qquad (3)$$

Если же $f(0)\neq 0$, то мы, очевидно, должны присоединить к решению (3), получаемому для $f(x)-f(0)$, ещё циклоидальное решение для $f(x)\equiv f(0)$, и таким образом найдем:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{s}} + \int_0^s \frac{f'(z)dz}{\sqrt{s-z}}\right].$$

Эта формула даст решение уравнения Абеля.
Поступая аналогично предыдущему, воспользовавшись вместо (2) формулой

$$\int_z^x \frac{ds}{(x-s)^{\alpha}(s-z)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\,,$$

получим решение обобщенного уравнения Абеля в виде:

$$\varphi(s) = \frac{sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \int_0^s \frac{f'(z)dz}{(s-z)^{1-\alpha}}\right].$$

Наша цель является с большой точностью вычислить интеграл

$$\int_0^s \frac{f'(z)dz}{(s-z)^{1-\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1.$$

Метод оптимальных квадратурных формул
Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int\limits_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\nu=0}^{\rho} C^{(\nu)}[\beta]\varphi^{(\nu)}[\beta] \qquad (4)$$

в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,t)$.[13-16]

Здесь $\varphi(x)\in L_2^{(m)}(0,t), \quad t>0$ произвольное конечное число, $h=\dfrac{t}{N}, \quad N\geq m$ натуральное число, $C^{(\nu)}[\beta]$-коэффициенты квадратурных формул,$[\beta]=h\beta,\ h=\dfrac{t}{N},\ N=1,2,...,\ 0<\alpha<1,\ t>0$.

Теорема 1. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (4) при $\rho = 0$ в пространстве $L_2^{(1)}(0,t)$ определяются формулами

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[0] = \frac{t^{\alpha}}{\alpha} + \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left((t-h)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right),$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[\beta] = \frac{h^{-1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1} - 2(t-h\beta)^{\alpha+1} + (t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right],\ \beta = 1,2,...,N-1$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(0)}[N] = \frac{h^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Доказательство теоемы (см.[7]).

Теорема 2. Среди квадратурных формул вида (4) при $\rho = 1$ в пространстве $L_2^{(2)}(0,t)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула коэффициенты которой определяются формулами, т.е. оптимальные коэффициенты имеют вид [38-43]

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[0] = \frac{1}{h[\alpha+2]!}\left[(t-h)^{\alpha+2} - t^{\alpha+2}\right] + \frac{1}{2[\alpha+1]!}\left[(t-h)^{\alpha+1} + t^{\alpha+1}\right],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[\beta] = \frac{1}{2[\alpha+1]!}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1} - (t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right] +$$

$$+\frac{h^{-1}}{[\alpha+2]!}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+2} - 2(t-h\beta)^{\alpha+2} + (t-h(\beta-1))^{\alpha+2}\right],\ \beta = 1,2,...,N-1.$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[N] = -\frac{h^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}\ ,$$

$$h = \frac{t}{N},\ N = 1,2,...,\ [\alpha+1]! = \alpha(\alpha+1),\ [\alpha+2]! = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2).$$

Доказательство теоемы (см.[8]).

Теорема 3. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (4) при $\rho = 2$ в пространстве $L_2^{(3)}(0,t)$ выражаются формулами

$$\overset{\circ}{C}{}^{(2)}[0] = \frac{h}{12[\alpha+1]!}\left[(t-h)^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}\right] + \frac{1}{2[\alpha+2]!}\left[(t-h)^{\alpha+2} + t^{\alpha+2}\right] +$$

$$+\frac{h^{-1}}{[\alpha+3]!}\left[(t-h)^{\alpha+3} - t^{\alpha+3}\right],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(2)}[\beta] = \frac{h}{12[\alpha+1]!}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+1} - 2(t-h\beta)^{\alpha+1} + (t-h(\beta-1))^{\alpha+1}\right] +$$

$$+\frac{1}{2[\alpha+2]!}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+2} - (t-h(\beta-1))^{\alpha+2}\right] +$$

$$+\frac{h^{-1}}{[\alpha+3]!}\left[(t-h(\beta+1))^{\alpha+3} - 2(t-h\beta)^{\alpha+3} + (t-h(\beta-1))^{\alpha+3}\right],$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{(2)}[N] = \frac{h^{\alpha+2}\alpha(\alpha-1)}{12[\alpha+3]!},\ [\alpha+3]! = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3).$$

Доказательство теоемы [9].

Численные приложения

В этом разделе мы применяем новую технику для построения аналитических решений линейных обобщенных интегральных уравнений Абеля. Численные результаты очень обнадеживают [44-50].

Пример 1.Решить обобщенное интегральное уравнение Абеля

$$\frac{128}{231}x^{\frac{11}{4}}=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{4}}}\varphi(t)dt.$$

Здесь $\alpha=\frac{1}{4},\quad f(x)=\frac{128}{231}x^{\frac{11}{4}}.$

Решение интегрального уравнение имеет вид

$\varphi(x)=x^2$

Таблица 1. Численные результаты полученные методом оптимальных квадратурных формул

t_i	$N=10$ $m=1$	$N=10$ $m=2$	Точное решение	Погрешность $m=1$	Погрешность $m=2$
0.1	0.01001266007	0.009999929847	0.009999999996	1.26(-5)	7.01(-8)
0.2	0.04005064032	0.03999971946	0.03999999998	5.06(-5)	2.81(-7)
0.3	0.09011394066	0.08999936856	0.08999999995	1.14(-4)	6.31(-7)

Пример 2. Решить обобщенное интегральное уравнение Абеля

$$\frac{432}{935}x^{\frac{17}{6}}=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{6}}}\varphi(t)dt.$$

Здесь $\alpha=\frac{1}{6},\quad f(x)=\frac{432}{935}x^{\frac{17}{6}}.$

Решение интегрального уравнение имеет вид

$\varphi(x)=x^2$

Таблица 2. Численные результаты полученные методом оптимальных квадратурных формул.

t_i	$N=10$ $m=1$	$N=10$ $m=2$	Точное решение	Погрешность $m=1$	Погрешность $m=2$
0.1	0.01001008169	0.009999975974	0.01000000000	1.01(-5)	2.40(-8)
0.2	0.04004032676	0.03999990388	0.04000000001	4.03(-5)	9.61(-8)
0.3	0.09009073517	0.08999978366	0.08999999998	9.07(-5)	2.16(-7)

Пример 3.Решить интегральное уравнение Абеля

$$e^x-1=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\varphi(t)dt.$$

Здесь $\alpha=\frac{1}{2},\quad f(x)=e^x-1.$

Решение интегрального уравнение имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{e^x}{\sqrt{\pi}}erf(\sqrt{x}),\qquad erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t}dt.$$

Таблица 3. Численные результаты полученные методом оптимальных квадратурных формул.

t_i	$N=10$ $m=1$	$N=10$ $m=2$	$N=10$ $m=3$	Точное решение	Погрешность	Погрешность	Погрешность

					$m=1$	$m=2$	$m=3$
0.5	0.6351540613	0.6350319232	0.6350318665	0.6350318720	1.22(-4)	5.12(-8)	5.5(-9)
0.6	0.7472466136	0.7470402800	0.7472466136	0.7470401731	2.06(-4)	1.07(-7)	1.12(-8)
0.7	0.8675128921	0.8671877786	0.8671875571	0.8671875857	3.25(-4)	1.93(-7)	2.86(-8)

5. Выводы

Разработан новый метод, основанной на оптимальных квадратурных формулах, которая применяется для получения точных решений обобщенных линейных интегральных уравнений Абеля.

Литература

1. Бухгейм, А. Л. (1983). Уравнения Вольтерра и обратные задачи.
2. Vessella, S. (1985). Stability Results for Abel Equation. In *Constructive Methods for the Practical Treatment of Integral Equations* (pp. 273-279). Birkhäuser Basel.
3. Gorenflo, R., & Yamamoto, M. (1999). Operator theoretic treatment of linear Abel integral equations of first kind. *Japan journal of industrial and applied mathematics*, *16*(1), 137-161.
4. Baker, C. T. (2000). A perspective on the numerical treatment of Volterra equations. *Journal of computational and applied mathematics*, *125*(1-2), 217-249.
5. Minerbo, G. N., & Levy, M. E. (1969). Inversion of Abel's integral equation by means of orthogonal polynomials. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *6*(4), 598-616.
6. Шадиметов, Х. М., & Далиев, Б. С. (2020). Коэффициенты оптимальных квадратурных формул для приближенного решения общего интегрального уравнения абеля. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, (2), 24-31.
7. Shadimetov, K., & Daliyev, B. (2021, July). Composite optimal formulas for approximate integration of weight integrals. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2365, No. 1, p. 020025). AIP Publishing LLC.
8. Shadimetov, K. M., & Daliev, B. S. (2022). Optimal formulas for the approximate-analytical solution of the general Abel integral equation in the Sobolev space. *Results in Applied Mathematics*, *15*, 100276.
9. Файзуллаев, Ж. И. (2020). Методика обучения ортогональных проекций геометрического тела в координатных плоскостях на основе развития математической компетентности. *Вестник Ошского государственного университета*, (1-4), 285-289.
10. Файзуллаев, Д. И. (2022). Развитие профессиональной компетентности студентов технических высших учебных заведений на основе деятельностного подхода. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *3*(10), 102-107.
11. Файзуллаев, Ж. И. (2022). Техника олий таълим муассасалари талабаларининг математик компетенциясини ривожлантириш математик таълим сифатини оширишнинг асоси сифатида. *Pedagogs jurnali*, *9*(2), 248-256.
12. Abdujabbor, A., & Nabiyevich, F. A. (2022). Econometric Assessment of the Perspective of Business Entities. *Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics*, *8*, 25-29.
13. Абдураззаков, А., Фозилов, А. Н., & Ташпулатов, А. (2021). Некоторые вопросы оптимизации рынка труда. *The Scientific Heritage*, (76-2), 29-32.
14. Расулов, Р., Сатторов, А., & Махкамова, Д. (2022). Вычисленние Квадрат Нормы Функционала Погрошности Улучшенных Квадратурных Формул В Пространстве. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *3*(4), 114-122.
15. Rashidjon, R., & Sattorov, A. (2021). Optimal Quadrature Formulas with Derivatives in the Space. *Middle European Scientific Bulletin*, *18*, 233-241.
16. Abdujabbor, A., Nasiba, M., & Nilufar, M. (2022). The Numerical Solution of Gas Filtration in Hydrodynamic Interconnected Two-Layer Reservoirs. *Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics*, *6*, 18-21.
17. Абдуразаков, А., Махмудова, Н. А., & Мирзамахмудова, Н. Т. (2022). Об одном численном решении краевых задач для вырождающихся параболических уравнений имеющие приложении в теории фильтрации. *Universum: технические науки*, (5-1 (98)), 41-45.

18. Abdujabbor, A., Nasiba, M., & Nilufar, M. (2022). Semi-discretization method for solving boundary value problems for parabolic systems. *Texas Journal of Multidisciplinary Studies*, *13*, 77-80.
19. Shaev, A. K., & Makhmudova, N. A. (2021). Convergence of the method of straight lines for solving parabolic equations with applications of hydrodynamically unconnected formations. *Ministry of higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan national university of Uzbekistan Uzbekistan academy of sciences VI Romanovskiy institute of mathematics*, 280.
20. Абдуразаков, А., Махмудова, Н. А., & Мирзамахмудова, Н. Т. (2021). Численное решение краевых задач для вырождающихся уравнений параболического типа, имеющих приложения в фильтрации газа в гидродинамических невзаимосвязанных пластах. *Universum: технические науки*, (10-1 (91)), 14-17.
21. Далиев, Б. С. (2021). Оптимальный алгоритм решения линейных обобщенных интегральных уравнений Абеля. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, *5*(35), 120-129.
22. Акбаров, Д. Е., Абдуразоков, А., & Далиев, Б. С. (2021). О Функционально Аналитической Формулировке И Существования Решений Системы Эволюционных Операторных Уравнений С Краевыми И Начальными Условиями. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *2*(11), 14-24.
23. Kosimova, M. Y., Yusupova, N. X., & Kosimova, S. T. (2021). Бернулли тенгламасига келтирилиб ечиладиган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун учинчи чегаравий масала. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *1*(10), 406-415.
24. Yusupova, N. K., & Abduolimova, M. Q. (2022). Use fun games to teach geometry. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *3*(7), 58-60.
25. Yusupova, N. X., & Nomoanjonova, D. B. (2022). Innovative technologies and their significance. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *3*(7), 11-16.
26. Shakhnoza, S. (2022). Application of Topology in Variety Fields. *Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics*, *11*, 63-71.
27. Bozarov, B. I. (2019). An optimal quadrature formula with sinx weight function in the Sobolev space. *Uzbekistan academy of sciences vi romanovskiy institute of mathematics*, *47*.
28. Akbarov, D. E., Kushmatov, O. E., Umarov, S. A., Bozarov, B. I., & Abduolimova, M. Q. (2021). Research on General Mathematical Characteristics of Boolean Functions' Models and their Logical Operations and Table Replacement in Cryptographic Transformations. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *2*(11), 36-43.
29. Shavkatjon oʻgʻli, T. B. (2022). Proving The Inequalities Using a Definite Integral and Series. *Texas Journal of Engineering and Technology*, *13*, 64-68.
30. Shavkatjon o'g'li, T. B. (2022). Some integral equations for a multivariable function. *Web of Scientist: International Scientific Research Journal*, *3*(4), 160-163.
31. Alimjonova, G. (2021). Modern competencies in the techno-culture of future technical specialists. *Current research journal of pedagogics*, *2*(06), 78-84.
32. Kupaysinova, Z. S. (2022). Attempts of Central Asian Scholars to Prove Euclid's Fifth Postulate. *Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics*, *12*, 71-75.
33. Yakubjanovna, Q. M. (2022). Some Methodological Features of Teaching the Subject «Higher Mathematics» in Higher Educational Institutions. *Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics*, *4*, 62-65.
34. Abdurahmonovna, N. G. (2022). Will Be on the Basis of Modern Economic Education Principles of Pedagogical Development of Analytical Thinking in Economists. *European Multidisciplinary Journal of Modern Science*, *6*, 627-632.
35. Nazarova, G. A. (2022). Will be on the basis of modern economic education Principles of pedagogical development of analytical thinking in economists. *Journal of Positive School Psychology*, 9579-9585.
36. Назарова, Г. А. (2022). Аналитик тафаккурни ривожлантиришнинг педагогик зарурати. *Integration of science, education and practice. Scientific-methodical journal*, *3*(3), 309-314.
37. Kosimova, M. Y. (2022). Talabalarni ta'lim sifatini oshirishda fanlararo uzviyligidan foydalanish. *Nazariy va amaliy tadqiqotlar xalqaro jurnali*, *2*(2), 57-64.

38. Qosimova, M. Y., & Yusupova, N. X. (2020). On a property of fractional integro-differentiation operators in the kernel of which the meyer function. *Scientific-technical journal*, *24*(4), 48-50.
39. Mirzakarimov, E. M., & Fayzullaev, J. S. (2020). Improving the quality and efficiency of teaching by developing students* mathematical competence using the animation method of adding vectors to the plane using the maple system. *scientific bulletin of namangan state university*, *2*(9), 336-342.
40. Mirzakarimov, E. M., & Faizullaev, J. I. (2019). Method of teaching the integration of information and educational technologies in a heterogeneous parabolic equation. *scientific bulletin of namangan state university*, *1*(5), 13-17.
41. Mirzaboevich, M. E. (2021). Using Maple Programs in Higher Mathematics. Triangle Problem Constructed on Vectors in Space. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *2*(11), 44-50.
42. Мирзакаримов, Э. М., & Файзуллаев, Д. И. (2021). Выполнять Линейные Операции Над Векторами В Пространстве В Системе Maple. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *2*(12), 10-16.
43. Мирзакаримов, Э. М. (2022). Использовать Систему Maple Для Определения Свободных Колебаний Прямоугольной Мембраны При Начальных Условиях. *Central Asian Journal Of Mathematical Theory And Computer Sciences*, *3*(1), 9-18.
44. Мамаюсупов, Ж. Ш. (2022). Интегральное преобразование Меллина для оператора интегродифференцирования дробного порядка. *Periodica Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities*, *11*, 186-188.
45. Mamayusupov, J. S. O. (2022). “iqtisod” yo’nalishi mutaxassislarini tayyorlashda matematika fanini o’qitish uslubiyoti. *Academic research in educational sciences*, *3*(3), 720-728.
46. Qo‘Ziyev, S. S., & Mamayusupov, J. S. (2021). Umumiy o ‘rta ta’lim maktablari uchun elektron darslik yaratishning pedagogik shartlari. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *1*(10), 447-453.
47. Kosimov, K., & Mamayusupov, J. (2019). Transitions melline integral of fractional integrodifferential operators. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, *1*(1), 12-15.
48. Qosimova, S. T. (2021). Two-point second boundary value problem for a quadratic simple second-order differential equation solved by the bernoulli equation. *Innovative Technologica: Methodical Research Journal*, *2*(11), 14-19.
49. Jalilov, I. I. U. (2022). К актуальным проблемам становления педагогического мастерства преподавателя. *Nazariy va amaliy tadqiqotlar xalqaro jurnali*, *2*(9), 81-89.
50. Акбаров, Д. Е., Кушматов, О. Э., Умаров, Ш. А., & Расулов, Р. Г. (2021). Исследования Вопросов Необходимых Условий Крипто Стойкости Алгоритмов Блочного Шифрования С Симметричным Ключом. *Central asian journal of mathematical theory and computer sciences*, *2*(11), 71-79.