



Математическое И Численное Решение Двумерной Связанной Задачи Термоупругости На Основе Деформацион Теории

Ю.С. Юсупов¹
С.А. Абдувоитов²

¹PhD, доцент Прикладного математика и интеллектуальные технологии факультета Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент, 100174.

¹PhD, доцент кафедрой прикладной информатики Технический институт ЁДЖУ, г. Ташкент, 100121.

²Магистрант факультета Математики и информатики, Джизакском государственном педагогическом университета, г. Ташкент, 100174.

e-mail: yusabio@gmail.com

ABSTRACT

Сформулированы связанные термодинамические упругие граничные задачи, основанные на теории деформации Ильюшина. С помощью метода конечных разностей построены два типа явных и неявных двумерных схем. В случае явной схемы численное решение задачи основано на рекуррентном соотношении. В случае неявной схемы способ решения задачи сводится к применению метода «прогонки». Сравнение численных результатов, полученных двумя методами, показывает, что они достаточно близки.

ARTICLE INFO

Received: 24th August 2022

Revised: 24th September 2022

Accepted: 30th October 2022

KEY WORDS:

Деформация, перемещения, температура, термоупругость, термопластичности, связанная, несвязанная.

Введение. Исследование термопластических состояний конструкций и их элементов является актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела. При постановке термоупругих [1] задач различают связанные и несвязанные краевые задачи. В общем случае связанной задачи уравнения движения твердого тела рассматриваются в сочетании с уравнением теплопроводности. Необходимо заметить, что температура и ее производная входит в уравнение движения, а деформация входит в уравнение теплопроводности.

В общем случае, термомеханическая краевая задача механики деформируемого твердого тела состоит из уравнения движения, определяющего соотношения термоупругости [2], соотношения Коши, уравнения притока тепла с соответствующими начальными и краевыми условиями. Заметим, что в этом случае, уравнения движения, записанные в перемещениях и уравнение притока тепла являются связанными, т.е. температура как неизвестная функция, зависящая от координаты и времени входит в уравнение движения, а уравнение притока тепла зависит от перемещения [3-5].

Если внешние факторы, вызывающие движение тела, изменяются во времени очень медленно, то в уравнении движения можно пренебречь инерционными членами, трактуя задачу как

квазистатическую [5]. При этом начальные условия относительно перемещений отпадают, но квазистатическая задача остается связанной. Если величины, вызывающие деформацию и температуру, изменяются достаточно медленно от нуля до своих конечных значений и остаются в таком состоянии, то мы получим статическую задачу. Перемещение и температура становятся не зависящими от времени и являются функциями координат положения точек и в уравнениях исчезают слагаемые содержащие производные по времени. В этом случае имеем несвязанную задачу термопластичности [1].

Постановка задачи. Связанная термодинамическая краевая задача термоупругости состоит из уравнений движения [2]

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

определяющего соотношения деформационной теории А.А. Ильюшина [3]

$$\sigma_{ij} = K(\theta - 3\alpha\vartheta)\delta_{ij} + \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad \vartheta = T - T_0 \quad (2)$$

уравнения притока тепла для изотропных материалов [5]

$$\lambda_0 T_{,ii} - C_\varepsilon \dot{T} - \alpha\gamma T_0 \cdot \dot{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad (3)$$

соотношения Коши
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + v_{j,i}), \quad (4)$$

с начальными
$$u_i|_{t=0} = \varphi_i, \quad \dot{u}_i|_{t=0} = \psi_i, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad (5)$$

и краевыми условиями
$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad T|_{\Sigma_1} = \bar{T}_0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0, \quad (6)$$

Уравнения термоупругости и уравнение теплопроводности в двумерном случае приобретают вид [7-9]:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \alpha(3\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \alpha(3\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$\lambda_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - C_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} - T(\beta_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \beta_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial t}) = 0. \quad (9)$$

с соответствующими начальными:

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \phi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi_1, \quad v(x, y, t)|_{t=0} = \phi_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_2, \quad T(x, y, t) \Big|_{t=0} = T_0; \quad (10)$$

и граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) \Big|_{x=0} = u_0, \quad u(x, y, t) \Big|_{x=\ell_1} = \bar{u}_0, \quad u(x, y, t) \Big|_{y=0} = u'_0, \quad u(x, y, t) \Big|_{y=\ell_2} = \bar{u}'_0, \\ v(x, y, t) \Big|_{x=0} = v_0, \quad v(x, y, t) \Big|_{x=\ell_1} = \bar{v}_0, \\ v(x, y, t) \Big|_{y=0} = v'_0, \quad v(x, y, t) \Big|_{y=\ell_2} = \bar{v}'_0, \quad T(x, y, t) \Big|_{x=0} = T_1(t), \quad (11) \\ T(x, y, t) \Big|_{x=\ell_1} = T_2(t), \quad T(x, y, t) \Big|_{y=0} = T'_1(t), \quad T(x, y, t) \Big|_{y=\ell_2} = T'_2(t); \end{aligned}$$

где C_ε – коэффициент теплоемкость при постоянной температуре, α – коэффициент теплового расширения, λ, μ – упругие константа, $\lambda_{11}, \lambda_{22}$ – коэффициент теплового потока, β_{11}, β_{22} – тензор теплового расширения, ℓ_1, ℓ_2 – размеры пластины, ρ – плотность материала, $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2, u_0, u'_0, \bar{u}_0, \bar{u}'_0, v_0, v'_0, \bar{v}_0, \bar{v}'_0, T_0, T_1, T_2, T'_1, T'_2$ – заданные величины.

Численная реализация. Построив в $t \geq 0, 0 \leq x \leq \ell_1, 0 \leq y \leq \ell_2$ три семейства параллельных прямых $x_i = ih_1$ ($i = \overline{0, n}$), $y_j = jh_2$ ($j = \overline{0, m}$), $t = k\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) заменяем производные в уравнениях (7)-(9) разностными отношениями и решив полученные разностные уравнения относительно $u_{i,j}^{k+1}, v_{i,j}^{k+1}, T_{i,j}^{k+1}$ соответственно получим [6, 10-12]

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left(\mu \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i-1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + \right. \\ \left. + (\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h_1^2} - \alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2h_1} \right) + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left(\mu \frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i-1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + \right. \\ \left. + (\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k}{h_2^2} - \alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{2h_2} \right) + 2v_{i,j}^k - v_{i,j}^{k-1}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau}{C_\varepsilon} \left(\lambda_{11} \frac{T_{i+1,j}^k - Tu_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} - \right. \\ \left. - T_{i,j}^k \left(\beta_{11} \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k-1} + u_{i-1,j}^{k-1}}{4h_1\tau} + \beta_{22} \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - v_{i,j-1}^{k+1} - v_{i,j+1}^{k-1} + v_{i,j-1}^{k-1}}{4h_2\tau} \right) + T_{i,j}^k. \quad (14) \end{aligned}$$

Как видно уравнения (12)-(14) позволяют найти значения функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $T(x, y, t)$ на слое t^{k+1} если известны значения на двух предыдущих слоях. Заменяя индекс k на $k+1$ в первом, слагаемом разностного уравнения (7-9) можно получить неявную разностную схему, решаемую по методу прогонки [13]

$$a_{i,j}u_{i+1,j}^{k+1} + b_{i,j}u_{i,j}^{k+1} + c_{i,j}u_{i-1,j}^{k+1} = f_{i,j} \quad (15)$$

$$a_{i,j} = \frac{\lambda + 2\mu}{h_1^2}, \quad b_{i,j} = -2\frac{(\lambda + 2\mu)}{h_1^2} - \frac{\rho}{\tau^2}, \quad c_{i,j} = \frac{\lambda + 2\mu}{h_1^2},$$

$$f_{i,j} = \alpha\gamma \frac{T_{i+1,j}^{k-1} - T_{i-1,j}^{k-1}}{2h_1} - \mu \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2} -$$

$$-(\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k - v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + \rho \frac{u_{i,j}^{k-1} - 2u_{i,j}^k}{\tau^2}.$$

$$A_{i,j}v_{i+1,j}^{k+1} + B_{i,j}v_{i,j}^{k+1} + C_{i,j}v_{i-1,j}^{k+1} = F_{i,j}, \quad (16)$$

где

$$A_{i,j} = \frac{\mu}{h_1^2}, \quad B_{i,j} = -2\frac{\mu}{h_1^2} - \frac{\rho}{\tau^2}, \quad C_{i,j} = \frac{\mu}{h_1^2},$$

$$F_{i,j} = \alpha\gamma \frac{T_{i+1,j}^{k-1} - T_{i-1,j}^{k-1}}{2h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k}{h_2^2} -$$

$$-(\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + \rho \frac{v_{i,j}^{k-1} - 2v_{i,j}^k}{\tau^2}.$$

Аналогичным образом, уравнение (9) можно привести к виду

$$a_{i,j}T_{i+1,j}^{k+1} + b_{i,j}T_{i,j}^{k+1} + c_{i,j}T_{i-1,j}^{k+1} = f_{i,j}, \quad (17)$$

где

$$a_{i,j} = \frac{\lambda_{11}}{h_1^2}, \quad b_{i,j} = -2\frac{\lambda_{11}}{h_1^2} - \frac{C_\varepsilon}{2\tau}, \quad c_{i,j} = \frac{\lambda_{11}}{h_1^2},$$

$$f_{i,j} = \beta_{11}T_0 \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k - u_{i+1,j}^{k-2} + u_{i-1,j}^{k-2}}{4h_1\tau} - \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} +$$

$$+ \beta_{22}T_0 \frac{v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k - v_{i,j+1}^{k-2} + v_{i,j-1}^{k-2}}{4h_2\tau} - \frac{C_\varepsilon}{2\tau} T_{i,j}^{k-1}.$$

Значения функций $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ на двух начальных слоях $k = 0$ и $k = 1$ мы найдём из начальных условий, а для значения функции $T(x, y, t)$ найдём заменяя смешанные производные другими разностными отношениями [14-16].

$$u_{i,j}^1 = \left(\frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j}^0 - 2u_{i,j}^0 + u_{i-1,j}^0}{h_1^2} + \mu \frac{u_{i,j+1}^0 - 2u_{i,j}^0 + u_{i,j-1}^0}{h_2^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^0 - v_{i-1,j+1}^0 - v_{i+1,j-1}^0 + v_{i-1,j-1}^0}{4h_1h_2} - \alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{T_{i+1,j}^0 - T_{i-1,j}^0}{2h_1} \right) + \right. \\ \left. + 2u_{i,j}^0 + 2\tau\psi_1 \right) / 2, \quad (18)$$

$$v_{i,j}^1 = \left(\frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1}^0 - 2v_{i,j}^0 + v_{i,j-1}^0}{h_2^2} + \mu \frac{v_{i+1,j}^0 - 2v_{i,j}^0 + v_{i-1,j}^0}{h_1^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^0 - u_{i-1,j+1}^0 - u_{i+1,j-1}^0 + u_{i-1,j-1}^0}{4h_1h_2} - \alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{T_{i,j+1}^0 - T_{i,j-1}^0}{2h_2} \right) + \right. \\ \left. + 2v_{i,j}^0 + 2\tau\psi_2 \right) / 2, \quad (19)$$

$$T_{i,j}^1 = \frac{\tau}{C_\varepsilon} \left(\lambda_{11} \frac{T_{i+1,j}^0 - 2T_{i,j}^0 + T_{i-1,j}^0}{h_1^2} + \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1}^0 - 2T_{i,j}^0 + T_{i,j-1}^0}{h_2^2} - \right. \\ \left. - T_{i,j}^0 \left(\beta_{11} \frac{u_{i+1,j}^1 - u_{i-1,j}^1 - u_{i+1,j}^0 + u_{i-1,j}^0}{2h_1\tau} + \beta_{22} \frac{v_{i,j+1}^1 - v_{i,j-1}^1 - v_{i,j+1}^0 + v_{i,j-1}^0}{2h_2\tau} \right) \right) + T_{i,j}^0. \quad (20)$$

Значения перемещений $u_{i,j}^{k+1}$, $v_{i,j}^{k+1}$ и температуры $T_{i,j}^{k+1}$ начиная со второго слоя, можно найти по методу прогонки (15)-(17), а значения этих функций на первом слое находим согласно методу рассмотренном в [10].

Тестовая задача. Решена связанная задача термоупругости (12-17) явным (методом сеток) и неявным (методом прогонки) методом. В качестве материала рассматривается медь при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad v(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ T(x, y, t)|_{x=0/x=1} = T_1 \sin(\pi y / \ell_2), \quad T(x, y, t)|_{y=0/y=1} = 0, \quad T(x, y, t)|_{t=0} = T_0;$$

использованы следующие упругие константы: $\lambda = 1$, $\lambda_{11} = 0.4$, $\lambda_{22} = 0.4$, $\alpha = 0.093$, $\beta_{11} = 0.15$, $\beta_{22} = 0.15$, $\mu = 0.5$, $\rho = 8.9$, $C_\varepsilon = 0.38$, $T_0 = 20$, $T_1 = 60$, $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.1$, $\tau = 0.01$, $n = 10$, $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 1$;

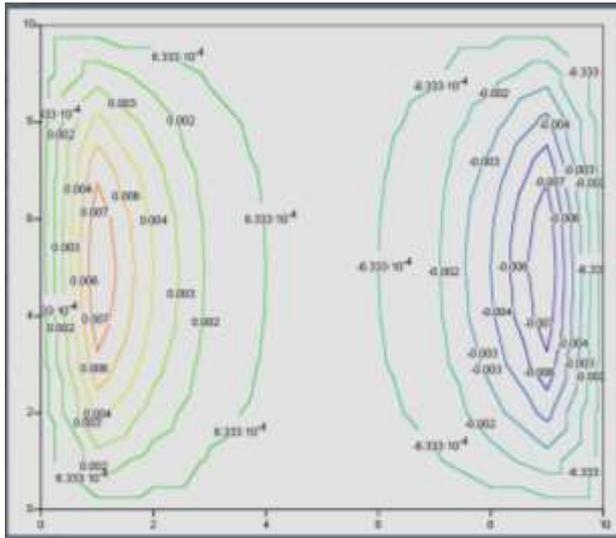


Рис. 1. Перемещения $U(x, y, t_n)$ (метод прогонки)

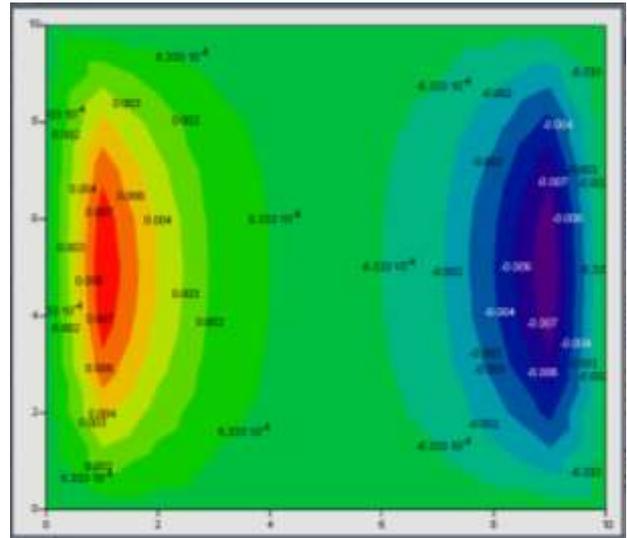


Рис.2. Перемещения $U(x, y, t_n)$ (метод сеток)

Перемещение $U(x, y, t_n)$ (метод прогонки)

Таблица 1.

$x \backslash y$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,002 4	0,001 4	0,000 6	0,000 2	0	- 0,000 2	- 0,000 6	- 0,001 4	- 0,0024	0
0,2	0	0,004 6	0,002 6	0,001 2	0,000 5	0	- 0,000 5	- 0,001 2	- 0,002 6	- 0,0046	0
0,3	0	0,006 4	0,003 6	0,001 6	0,000 6	0	- 0,000 6	- 0,001 6	- 0,003 6	- 0,0064	0
0,4	0	0,007 5	0,004 2	0,001 9	0,000 7	0	- 0,000 7	- 0,001 9	- 0,004 2	- 0,0075	0
0,5	0	0,007 9	0,004 4	0,002	0,000 8	0	- 0,000 8	-0,002	- 0,004 4	- 0,0079	0
0,6	0	0,007 5	0,004 2	0,001 9	0,000 7	0	- 0,000 7	- 0,001 9	- 0,004 2	- 0,0075	0
0,7	0	0,006 4	0,003 6	0,001 6	0,000 6	0	- 0,000 6	- 0,001 6	- 0,003 6	- 0,0064	0
0,8	0	0,004 6	0,002 6	0,001 2	0,000 5	0	- 0,000 5	- 0,001 2	- 0,002 6	- 0,0046	0
0,9	0	0,002 4	0,001 4	0,000 6	0,000 2	0	- 0,000 2	- 0,000 6	- 0,001 4	- 0,0024	0

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Перемещение $U(x, y, t_n)$ (метод сеток)

Таблица 2.

$x \backslash y$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0,0025	0,0014	0,0005	0,0002	0	-0,0002	-0,0005	-0,0014	-0,0025	0
0,2	0	0,0048	0,0026	0,001	0,0004	0	-0,0004	-0,001	-0,0026	-0,0048	0
0,3	0	0,0067	0,0036	0,0013	0,0005	0	-0,0005	-0,0013	-0,0036	-0,0067	0
0,4	0	0,0078	0,0042	0,0015	0,0006	0	-0,0006	-0,0015	-0,0042	-0,0078	0
0,5	0	0,0082	0,0044	0,0016	0,0006	0	-0,0006	-0,0016	-0,0044	-0,0082	0
0,6	0	0,0078	0,0042	0,0015	0,0006	0	-0,0006	-0,0015	-0,0042	-0,0078	0
0,7	0	0,0067	0,0036	0,0013	0,0005	0	-0,0005	-0,0013	-0,0036	-0,0067	0
0,8	0	0,0048	0,0026	0,001	0,0004	0	-0,0004	-0,001	-0,0026	-0,0048	0
0,9	0	0,0025	0,0014	0,0005	0,0002	0	-0,0002	-0,0005	-0,0014	-0,0025	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

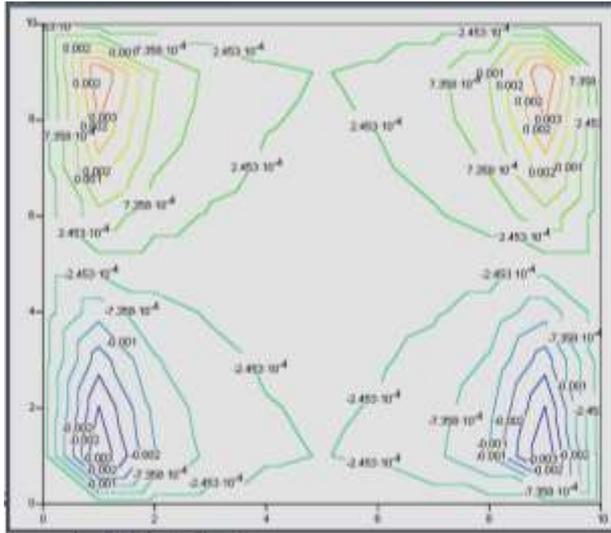


Рис. 3. Перемещения $V(x, y, t_n)$ (метод прогонки)

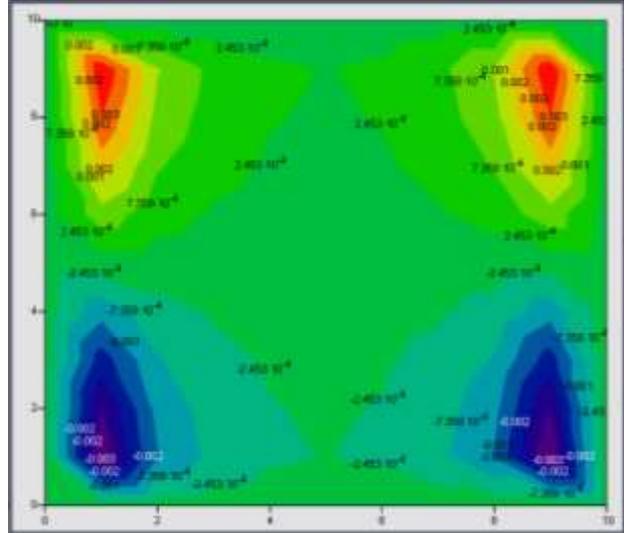


Рис.4. Перемещения $V(x, y, t_n)$ (метод сеток)

Перемещение $V(x, y, t_n)$ (метод прогонки)

Таблица 3.

x \ y	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	- 0,003 2	- 0,001 3	- 0,000 6	- 0,000 3	- 0,000 2	- 0,000 3	- 0,000 6	- 0,001 3	- 0,0032	0
0,2	0	- 0,002 7	- 0,001 1	- 0,000 5	- 0,000 3	- 0,000 2	- 0,000 3	- 0,000 5	- 0,001 1	- 0,0027	0
0,3	0	-0,002	- 0,000 8	- 0,000 4	- 0,000 2	- 0,000 1	- 0,000 2	- 0,000 4	- 0,000 8	-0,002	0
0,4	0	-0,001	- 0,000 4	- 0,000 2	- 0,000 1	- 0,000 1	- 0,000 1	- 0,000 2	- 0,000 4	-0,001	0
0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,6	0	0,001	0,000 4	0,000 2	0,000 1	0,000 1	0,000 1	0,000 2	0,000 4	0,001	0
0,7	0	0,002	0,000 8	0,000 4	0,000 2	0,000 1	0,000 2	0,000 4	0,000 8	0,002	0
0,8	0	0,002 7	0,001 1	0,000 5	0,000 3	0,000 2	0,000 3	0,000 5	0,001 1	0,0027	0
0,9	0	0,003 2	0,001 3	0,000 6	0,000 3	0,000 2	0,000 3	0,000 6	0,001 3	0,0032	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Перемещение $V(x, y, t_n)$ (метод сеток)

Таблица 4.

$x \backslash y$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	- 0,003 2	- 0,001 5	- 0,000 6	- 0,000 3	- 0,000 2	- 0,000 3	- 0,000 6	- 0,001 5	- 0,0032	0
0,2	0	- 0,002 7	- 0,001 2	- 0,000 5	- 0,000 2	- 0,000 2	- 0,000 2	- 0,000 5	- 0,001 2	- 0,0027	0
0,3	0	-0,002	- 0,000 9	- 0,000 4	- 0,000 2	- 0,000 1	- 0,000 2	- 0,000 4	- 0,000 9	-0,002	0
0,4	0	-0,001	- 0,000 5	- 0,000 2	- 0,000 1	- 0,000 1	- 0,000 1	- 0,000 2	- 0,000 5	-0,001	0
0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,6	0	0,001	0,000 5	0,000 2	0,000 1	0,000 1	0,000 1	0,000 2	0,000 5	0,001	0
0,7	0	0,002	0,000 9	0,000 4	0,000 2	0,000 1	0,000 2	0,000 4	0,000 9	0,002	0
0,8	0	0,002 7	0,001 2	0,000 5	0,000 2	0,000 2	0,000 2	0,000 5	0,001 2	0,0027	0
0,9	0	0,003 2	0,001 5	0,000 6	0,000 3	0,000 2	0,000 3	0,000 6	0,001 5	0,0032	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

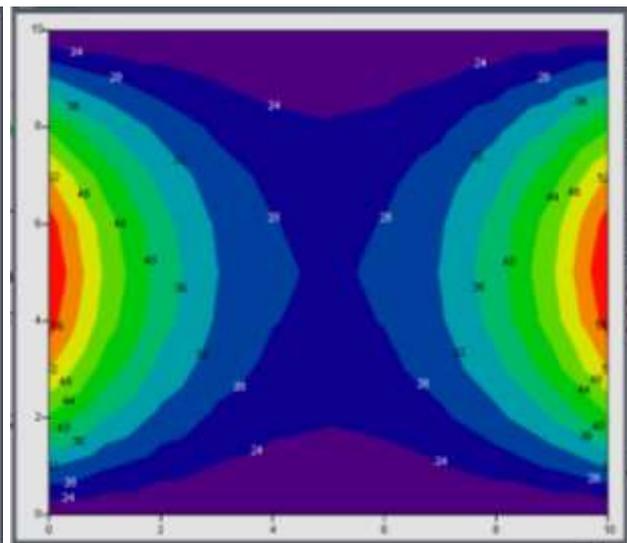
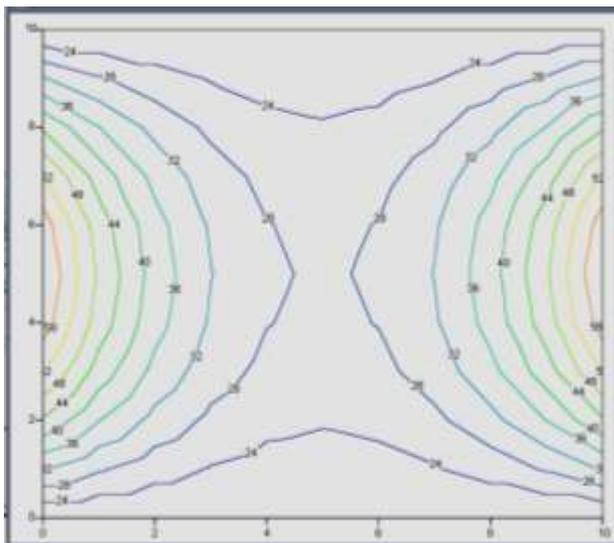


Рис. 5. Температура $T(x, y, t_n)$ (метод прогонки) Рис. 6. Температура $T(x, y, t_n)$ (метод сеток)

Температура $T(x, y, t_n)$ (метод прогонки)

Таблица 5.

$x \backslash y$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
0,1	32,36	28,5	25,68	23,76	22,65	22,29	22,65	23,76	25,68	28,5	32,36
0,2	43,51	36,13	30,78	27,13	25,04	24,36	25,04	27,13	30,78	36,13	43,51
0,3	52,36	42,2	34,82	29,81	26,93	25,99	26,93	29,81	34,82	42,2	52,36
0,4	58,04	46,1	37,43	31,54	28,15	27,05	28,15	31,54	37,43	46,1	58,04
0,5	60	47,44	38,32	32,13	28,57	27,41	28,57	32,13	38,32	47,44	60
0,6	58,04	46,1	37,43	31,54	28,15	27,05	28,15	31,54	37,43	46,1	58,04
0,7	52,36	42,2	34,82	29,81	26,93	25,99	26,93	29,81	34,82	42,2	52,36
0,8	43,51	36,13	30,78	27,13	25,04	24,36	25,04	27,13	30,78	36,13	43,51
0,9	32,36	28,5	25,68	23,76	22,65	22,29	22,65	23,76	25,68	28,5	32,36
1	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

Температура $T(x, y, t_n)$ (метод сеток)

Таблица 6.

$X \backslash T$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
0,1	32,36	28,31	26,32	23,14	23,64	21,45	23,64	23,14	26,32	28,31	32,36
0,2	43,51	35,47	32,44	25,6	27,15	22,58	27,15	25,6	32,44	35,47	43,51
0,3	52,36	41,56	36,74	28	29,66	23,67	29,66	28	36,74	41,56	52,36
0,4	58,04	45,18	39,89	29,24	31,44	24,26	31,44	29,24	39,89	45,18	58,04
0,5	60	46,57	40,8	29,79	32	24,5	32	29,79	40,8	46,57	60
0,6	58,04	45,18	39,89	29,24	31,44	24,26	31,44	29,24	39,89	45,18	58,04
0,7	52,36	41,56	36,74	28	29,66	23,67	29,66	28	36,74	41,56	52,36
0,8	43,51	35,47	32,44	25,6	27,15	22,58	27,15	25,6	32,44	35,47	43,51
0,9	32,36	28,31	26,32	23,14	23,64	21,45	23,64	23,14	26,32	28,31	32,36
1	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

На рис.1 - рис.4 показаны распределение перемещений $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$, на рис.5 и рис.6 распределение температуры $T(x, y, t)$ построенные по результатам явных и неявных схем. В таблицах 1-6 приведены, численные результаты термоэластической задачи по явным (метод сеток) и неявным схемам (метод прогонки). Сравнение результатов относительно перемещений $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и температуры $T(x, y, t)$ показывает, и по рисункам можно увидеть, что численные результаты полученные по явному (сеточный метод) и неявным (метод прогонки) схемам почти совпадают и достаточно близки, что обеспечивает достоверность полученных результатов.

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. Москва, Изд. Мир, 1975
2. Ильюшин А.А. Пластичность, Часть 1: Теория малых упругопластических деформаций. Москва, ГИТТЛ, 1948.
3. Ильюшин А.А. и Победря Б.Е. Основы математической теории термовязко упругости. – М.: Наука, 1980. -280 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.:Наука, 1969, 420 с.
5. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. -М.: МГУ, 1996. - 343с.

6. Самарский А.А., Николаев Е.А., Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983. – 646.
7. Yusupov, Y. S. (2022). Numerical Solution of a TwoDimensional Dynamic Related Problem of Thermal Support. *Eurasian Journal of Engineering and Technology*, 5, 125-134.
8. Khaldjigitov, A. A., Kalandarov, A. A., & Yusupov, Y. S. (2019). Coupled problems of thermoelasticity and thermoplasticity. *T. "Fan va texnologiya"*, 203.
9. Khaldjigitov, A. A., Yusupov, Y. S., Khudazarov, R. S., & Sagdullaeva, D. A. (2019). On the thermoplasticity constitutive relations for isotropic and transversely isotropic materials. *International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD)*, 9(4), 467-478.
10. Khaldjigitov, A. A., Yusupov, Y. S., Rasedee, A. F. N., & Long, N. N. (2019, April). Mathematical modeling and simulation of the coupled strain space thermoplasticity problems. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1212, No. 1, p. 012023). IOP Publishing.
11. Юсупов, Ю. С. (2019). Численное решение связанной динамической термоупруго-пластической задачи, основанной на деформационной теории. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, (4 (22)), 101-110.
12. Saidjonovich, Yusupov Yusufbay, and Babadjanov Mumin Radjapovich. "Numerical solution of a Three-Dimensional Coupled thermoplastic problem based on deformation theory" *The International Journal of Science & Technoledge* 7.9 (2019).
13. Халджигитов А.А., Юсупов Ю.С., & Адамбаев У.Э. (2019). Численное моделирование связанной двумерной динамической задачи термопластичности. *Вестник Илм сарчаималари*, (11), 12-15.
14. Yusupov, Y., & Khaldjigitov, A. A. (2017). Mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic thermoplastic problem. *Universal Journal of Computational Mathematics*, 5(2), 34-43.
15. Юсупов Ю. С., Хасанов К. А. Численное решение одномерной термопластической задачи для изотропных тел //Управление инновациями: теория, методология, практика. – 2014. – №. 11. – С. 131-138.
16. Юсупов Ю. С., Хужакулов Ш. А., Худаяров Ш. Ш. Численное решение двухмерной связанной термопластической задачи основанной на деформационной теории //Управление инновациями: теория, методология, практика. – 2014. – №. 11. – С. 138-144.
17. Yusupov Y. S., Khaldjigitov A. A. Numerical solution of the coupled dynamic problems based on the deformation and flow thermoplasticity theories.
18. Khaldjigitov, A. A., Qalandarov, A. A., Yusupov, Y. S., & Sagdullaeva, D. A. (2013). Numerical modelling of the 1D thermoplastic coupled problem for isotropic materials. *Acta TUIT*, 1.